1 Enunciado

Se tiene un solenoide largo de radio 5.00 cm y longitud 1.00 m, con un cable arrollado en 5000 vueltas, por el que circula una corriente variable en el tiempo de la forma $I(t) = I_0\cos(2\pi ft)$, con $I_0 = 1.00\,\mathrm{A}$ y $f = 50.0\,\mathrm{Hz}$. Calcula el campo eléctrico creado en el interior y el exterior del solenoide.

2 Solución

La ley de Faraday puede escribirse así. Consideramos una curva cerrada Γ

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

siendo Φ_m el flujo magnético a través de una superficie S_Γ que se apoye en la curva cerrada Γ.

El significado físico de esta ley es que un campo magnético variable en el tiempo crea un campo eléctrico. Así pues, podemos tener campo eléctrico aunque no haya densidades de carga en el sistema.

En este problema el solenoide crea en su interior un campo magnético. Si el solenoide es largo, es decir, que su radio sea mucho menor que su longitud, el campo en su interior es uniforme y vale

$$\vec{B} = \mu_0\, n\, I(t)\,\vec{u} = \mu_0\,\frac{N}{L}\,I(t)\,\vec{u}$$

N es el número de vueltas que da el cable, L es la longitud del solenoide ($n = N / L$ es el número de vueltas por unidad de longitud), μ_0 es la permeabilidad del vacío e $I(t)$ es la intensidad que circula por el cable. El vector $\vec{u}$ es un vector unitario paralelo al eje del solenoide.

Si la intensidad que circula por el cable varía en el tiempo, el campo magnético en el interior del solenoide también lo hace. En el enunciado del problema se dice que la corriente es $I(t) = I_0\,\cos(2\pi ft)$. Por tanto el campo magnético en el interior del solenoide puede expresarse como

$$\vec{B}(t) = B_0\,\cos(2\pi ft)\,\vec{u}$$

con

$$B_0 = \mu_0\,\frac{N}{L}\,I_0$$

Este campo magnético variable en el tiempo hace que aparezca un flujo magnético también variable en el tiempo. Este flujo es el que va a producir el campo eléctrico.

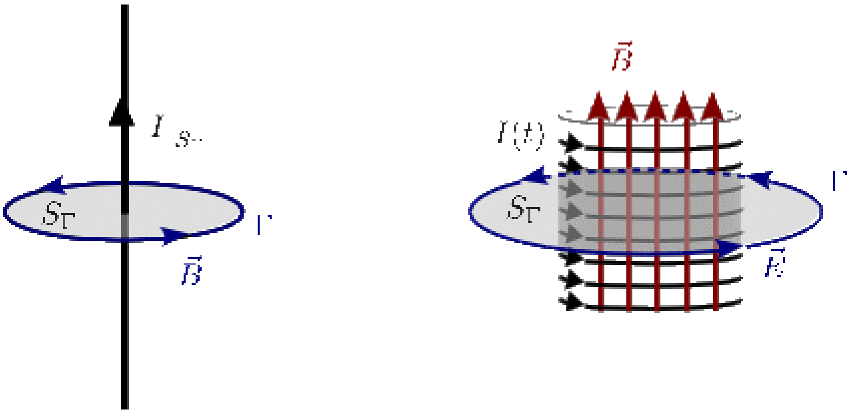
2.1 Campo en el exterior del solenoide

La geometría del problema es similar a la que teníamos al calcular el campo magnético de un hilo infinito por el que circula una corriente constante I. En este caso aplicamos la ley de Ampère

$$\oint_\Gamma = \mu_0 \; I|_{S_\Gamma}$$

Sabemos por argumentos de simetría que las líneas de campo magnético son circunferencias con centro en el hilo. Escogemos como curva Γ una de estas circunferencias, y como superficie S_Γ el círculo definido por esa circunferencia. Así, la corriente que atraviesa esa superficie es

$$I|_{S_\Gamma} = I$$



$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \;\; I|_{S_\Gamma} \qquad\qquad \oint_\Gamma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$$

En el caso del solenoide, el papel de la corriente lo realiza el campo magnético. Entonces las líneas de campo eléctrico serán circunferencias concéntricas con el solenoide, de forma similar a las líneas de campo magnético alrededor del hilo de corriente.

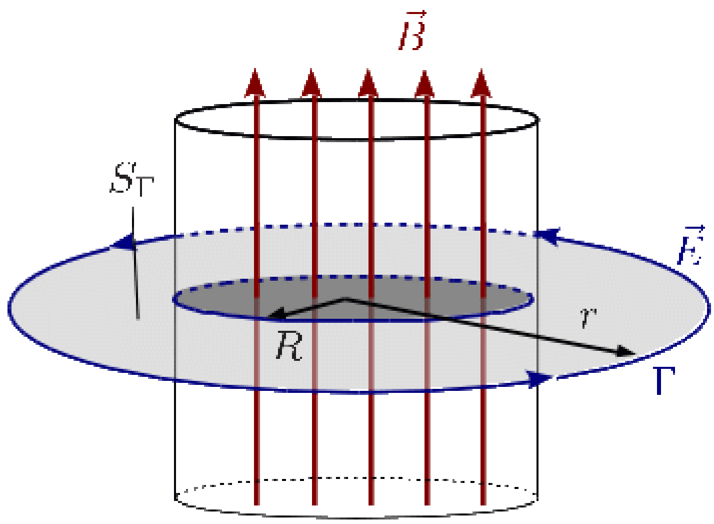
Tenemos entonces que el campo eléctrico es de la forma

$$\vec{E} = E(r,t)\,\vec{u}_\phi$$

siendo $\vec{u}_\phi$ el vector de las ccordenadas polares. Sabiendo esto, vamos a aplicar la ley de Faraday sobre una circunferencia concçentrica con el solenoide de radio $r > R$. Esta circunferencia coiincide con la línea de campo eléctrico. Entnoces, la integral de línea es

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_\Gamma E(r,t)\,\mathrm{d}l = E(r,t)\oint_\Gamma \mathrm{d}l = 2\pi\, r\, E(r,t)$$

En el lado derecho de la Ley de Faraday tenemos el flujo magnético que atraviesa una superficie apoyada en la línea. Escogemos como superficie el círculo S_Γ indicado en la figura. El campo magnético sólo atraviesa este círculo en la parte de este que está dentro del solenoide. Por tanto el flujo magnético a través de la superficie S_Γ es



$$\Phi_m = \int_{S_\Gamma} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = B(t)\,\pi\, R^2 = B_0\,\pi\, R^2\,\cos(2\,\pi\, f t)$$

La derivada respecto al tiempo del flujo magnético es

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = 2\,\pi^2\, f\, B_0\, R^2\,\mathrm{sen}\,(2\pi\, f\, t)$$

Ahora podemos igualar las dos expresiones

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} \Rightarrow 2\,\pi\, r\, E(r,t) = 2\,\pi^2\, f\, B_0\, R^2\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\, f\, t)$$

De aquí obtenemos el campo eléctrico en el exterior del solenoide

$$\vec{E} = \frac{\pi\, f\, B_0\, R^2}{r}\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\, f\, t)\,\vec{u}_\phi$$

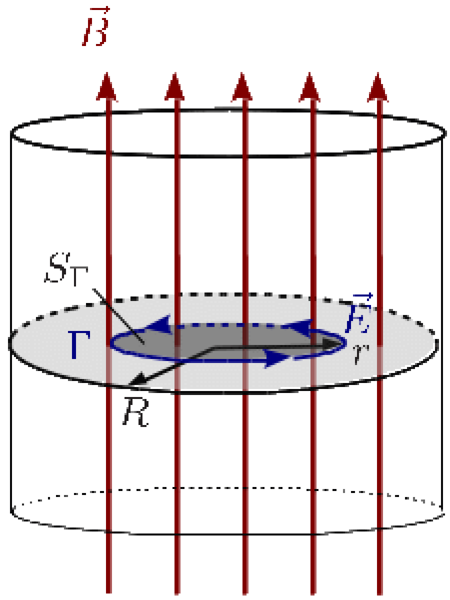
El campo decrece con la distancia r al eje del solenoide.

2.2 Campo eléctrico en el interior del solenoide

Ahora escogemos una circunferencia de radio $r < R$ para aplicar la Ley de Faraday. El lado izquierdo de la Ley es igual que en el apartado anterior

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_\Gamma E(r,t)\,\mathrm{d}l = E(r,t)\oint_\Gamma \mathrm{d}l = 2\,\pi\, r\, E(r,t)$$

Ahora el campo magnético atraviesa toda la superficie S_Γ, pues el círculo está por dentro del solenoide. Tenemos



$$\Phi_m = B(t)\,\pi\,r^2 = B_0\,\pi\,r^2\,\cos(2\,\pi\,f\,t)$$

Su derivada respecto del tiempo es

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = 2\,\pi^2\,f\,B_0\,r^2\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,f\,t)$$

Igualando los dos lados de la Ley de Faraday tenemos

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} \Rightarrow 2\,\pi\,r\,E(r,t) = 2\,\pi^2\,f\,B_0\,r^2\,\mathrm{sen}\,(2\pi\,f\,t)$$

De aquí obtenemos el campo eléctrico en el exterior del solenoide

$$\vec{E} = \pi\,f\,B_0\,r\,\mathrm{sen}\,(2\pi\,f\,t)\,\vec{u}_\phi$$

En el interior del solenoide el campo eléctrico es nulo en su eje y crece proporcionalmente a la distancia al eje.

Podemos comprobar que el campo elétrico es continuo cuando pasamos del interior al exterior del solenoide. Las expresiones del campo eléctrico en el exterior y el interior coinciden cuando $r = R$.